

嵌套多涡卷忆阻Hopfield神经网络及其硬件实现

王哲 万求真* 周盼 饶湖辉

(湖南师范大学信息科学与工程学院 长沙 410081)

摘要: 忆阻Hopfield神经网络是将忆阻器引入传统Hopfield神经网络(HNN), 借助忆阻器模拟神经元突触来实现突触权重动态调节的类脑神经网络模型。本文提出一种含符号函数的多分段非线性磁控忆阻器, 并将其应用于三神经元HNN系统的自连接突触, 构建了四维忆阻HNN系统。首先, 利用分岔图和李雅普诺夫指数谱, 分析忆阻自连接突触耦合强度对系统动力学行为的调控作用, 揭示了与系统初值相关的共存吸引子及其演化规律。同时, 发现该系统具备多涡卷吸引子的单向拓展特性, 以及多涡卷吸引子数目随忆阻器控制参数的变化而改变。在此基础上, 通过施加多级逻辑脉冲电流进行调控, 构建了一种新型嵌套多涡卷忆阻HNN系统, 促使系统产生具有嵌套结构的特殊多涡卷吸引子, 并分析了加入多级逻辑脉冲电流前后系统复杂度的变化情况。最后, 采用Multisim模拟电路仿真与FPGA数字电路实验, 双重验证了MATLAB数值仿真结果的正确性。

关键词: Hopfield神经网络; 忆阻自连接突触; 多级逻辑脉冲电流; 嵌套多涡卷吸引子; 硬件实现

中图分类号: TN601

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2026)00-0001-11

DOI: 10.11999/JEIT260516

CSTR: 32379.14.JEIT260516

1 引言

生物神经系统由数以亿计的神经元组成, 每个神经元通过突触与上万个同质或异质神经元相连, 构成庞大的复杂网络。在神经元间存在着丰富的放电活动, 这些脑电活动所表现出的复杂动力学与大脑的记忆、情感、思维、学习等认知功能密切相关。为探索大脑的奥秘, 受生物神经系统启发, 人们通过研究神经元的放电机制和神经网络的拓扑结构, 建立了多种人工神经元和人工神经网络模型^[1-4], 如Fitzhugh-Nagumo (FN)神经元, Hindmarsh-Rose (HR)神经元, Hopfield神经网络(HNN)等。HNN因结构简单、易用分立元件实现而被广泛应用, 但其传统模型用固定电阻来模拟强度可变的突触, 无法产生复杂的类脑混沌动力学行为。

近年来, 利用阻值可变的忆阻器模拟突触备受关注。忆阻器的阻值随其两端电压或电流的变化而变化, 这与突触的可塑性相似。研究表明, 可利用忆阻突触替代传统模型中的电阻突触构建忆阻神经网络模型。例如, 文献^[5]提出了具有双重忆阻自连接突触的三神经元环状HNN, 该系统用两个忆阻自连接突触替代电阻自连接突触, 使原简单环状HNN产生复杂混沌和超混沌等动力学行为。文献^[6]构建了含单向突触连接的极简环状HNN, 通过改变忆阻

器的耦合强度与内部参数, 可促使该系统产生多种不同类型的共存吸引子。此外, 可以用忆阻器的磁通特性描述神经元受电磁辐射影响的磁感应效应, 从而建立受电磁辐射影响的忆阻神经网络模型。例如, 文献^[7]研究了外部电磁辐射和双重偏置电流对HNN动力学行为的影响, 发现该HNN能产生周期、拟周期、双涡卷混沌和瞬态混沌等隐藏吸引子。文献^[8]提出了含三种忆阻器的异质忆阻神经网络, 该系统由HR神经元与FN神经元通过忆阻突触耦合连接, 且二者分别受外部忆阻电磁辐射影响, 能产生多种放电现象和分岔模式。文献^[9]在FN神经元和HNN之间引入理想磁控忆阻器, 模拟神经元膜电位差引起的双向电磁感应电流, 该系统发现了多种共存混沌吸引子。与传统模型相比, 忆阻神经网络因忆阻突触权重的动态变化或磁感应效应的引入, 能产生复杂的混沌动力学现象, 如超混沌吸引子、共存吸引子、瞬态混沌、簇发振荡等^[10-12], 能更真实地反映生物神经系统的非线性动力学行为。由此可见, 忆阻器的引入使得忆阻神经网络成为神经网络领域备受关注的研究方向。

相较于单涡卷、双涡卷吸引子, 多涡卷吸引子具有拓扑结构复杂、状态空间遍历性强的特点。将其生成的混沌信号应用于保密通信系统, 能更有效地掩盖要传输的信号, 因此多涡卷吸引子已成为众多学者的研究热点。当前, 多涡卷吸引子的研究朝着可控化、多向化与高维化方向发展, 由此生成的随机序列具有更高的不可预测性。例如, 文献^[13]提出了基于可变数量忆阻自连接突触的三神经元HNN, 通过多分段忆阻器模拟一至三个自连接突触, 通过调控忆阻器参数可生成单方向、网格和空间方向的多双涡卷吸引子。文献^[14]提出用忆

收稿日期: 2026-04-26; 改回日期: 2026-06-28; 网络出版: 2026-07-14

*通信作者: 万求真 wanzhen@sina.com

基金项目: 国家自然科学基金(61901169), 湖南省自然科学基金项目(2024JJ5267)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61901169), The Natural Science Foundation of Hunan Province (2024JJ5267)

阻器模拟外部电磁感应电流的三维双神经元HNN, 能产生随仿真时间变化且涡卷数目可变可控的多涡卷混沌吸引子。文献[15]提出了含电磁辐射与忆阻突触权重的忆阻全连接HNN, 该系统实现了方向与数目可控的多双涡卷混沌吸引子。文献[16]引入三种多稳态忆阻器模拟HNN中三个神经元的电磁辐射效应, 生成了任意数目的空间多涡卷混沌吸引子。尽管多涡卷吸引子的产生方法不断涌现, 但现有研究仍以单一结构的多涡卷吸引子为主, 而具有特殊结构的多涡卷吸引子值得进一步探索。

基于此, 本文以三神经元HNN为基础, 将多分段非线性磁控忆阻器引入神经元自连接突触, 构建四维忆阻HNN系统; 在平衡点及稳定性分析基础上, 研究忆阻自连接突触的耦合强度及系统初始值对该HNN系统动力学行为的影响; 发现系统可经倍周期分岔进入混沌, 产生单、双涡卷混沌吸引子, 且通过调控忆阻器参数可拓展多涡卷吸引子数目。在此基础上, 外加多级逻辑脉冲电流进行调控, 搭建一种新型嵌套多涡卷忆阻HNN系统, 发现该系统能产生嵌套多涡卷吸引子等复杂动力学行为, 且外加多级逻辑脉冲电流后能显著提升系统的复杂度。最后, 采用Multisim模拟电路仿真实验与FPGA数字电路硬件实验, 验证了所提嵌套多涡卷忆阻HNN系统的物理可实现性。

2 系统模型与稳定性分析

2.1 系统模型

1982年, Hopfield提出含双曲正切激活函数的HNN, 用于模拟生物神经网络行为, 其第 n 个神经

$$h(\varphi) = \begin{cases} \varphi N = 0 \\ h_1(\varphi) = \begin{cases} \varphi - G \sum_{i=1}^N (\text{sgn}(\varphi + G(2i-1)) + (\text{sgn}(\varphi - G(2i-1)))) N = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \\ h_2(\varphi) = \begin{cases} \varphi - G \text{sgn}(\varphi) M = 0 \\ \varphi - G \text{sgn}(\varphi) - G \sum_{j=1}^M (\text{sgn}(\varphi + 2Gj) + (\text{sgn}(\varphi - 2Gj))) M = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中阶跃函数间距 G 作为可调参数, 在本文中取值为1。 N 和 M 是该忆阻器的控制参数, 可通过设置其数值使吸引子的数目连续增长。在式(2)的基础上, 使用式(3)和式(4)所描述的多分段非线性磁控忆阻器, 替代神经元2自连接突触的权值0.0001, 构建出如图1所示的忆阻自连接突触激励下的HNN拓扑图。所构建的四维忆阻HNN系统可描述为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2.6 \tanh(x) - 1.44 \tanh(y) + 0.6 \tanh(z) \\ \dot{y} = -y + 2.4 \tanh(x) + kW(\varphi) \tanh(y) + 1.35 \tanh(z) \\ \dot{z} = -z - 6 \tanh(x) - 1.2 \tanh(z) \\ \dot{\varphi} = c \tanh(y) - dh(\varphi) \end{cases} \quad (5)$$

元的数学表达式如下所示:

$$C_i \dot{x}_i = -\frac{x_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \tanh(x_j) + I_i (i, j \in N^*) \quad (1)$$

在上式中, x_i 代表第 i 个神经元的膜电位, C_i 和 R_i 分别代表神经元内外的膜电容和膜电阻, I_i 为神经元的外部偏置电流。为简化计算, 将 C_i 、 R_i 、 I_i 的值分别设为1、1、0。另外, $\tanh(x_j)$ 是有界的神经元激活函数; w_{ij} 表示神经元 i 与神经元 j 之间的突触权值, 它直接影响HNN的性能。本节基于HNN的公式(1), 通过试错法选取合适的 w_{ij} 作为HNN的突触权值, 构建的三神经元HNN可描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2.6 \tanh(x) - 1.44 \tanh(y) + 0.6 \tanh(z) \\ \dot{y} = -y + 2.4 \tanh(x) + 0.0001 \tanh(y) + 1.35 \tanh(z) \\ \dot{z} = -z - 6 \tanh(x) - 1.2 \tanh(z) \end{cases} \quad (2)$$

式中 x 、 y 和 z 分别为神经元 i ($i=1, 2, 3$)的膜电位。突触作为神经元之间信号传递的关键枢纽, 对于维系神经系统的基本功能起着不可替代的作用。本文采用忆阻器来模拟神经元2的自连接突触。其中, 选用的多分段非线性磁控忆阻器的数学模型如下:

$$\begin{cases} i = W(\varphi)v \\ W(\varphi) = a + b\varphi \\ \dot{\varphi} = c v - dh(\varphi) \end{cases} \quad (3)$$

其中, φ 为忆阻器内部状态变量, $W(\varphi)$ 为忆导函数表达式, a 、 b 、 c 和 d 为忆阻器的模型参数。 $h(\varphi)$ 为内部状态变量函数, 分为 $h_1(\varphi)$ 和 $h_2(\varphi)$ 两部分, 具体的函数表达式如下:

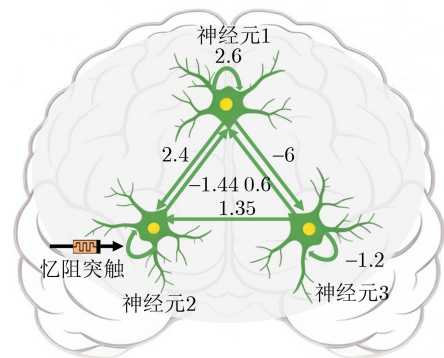


图1 忆阻自连接突触激励下的HNN拓扑图

式中, k 代表忆阻自连接突触在系统中的耦合强度, 通过调控 N 和 M , 式(5)可生成不同数量的吸引子。

2.2 平衡点与稳定性分析

设 $P=(x_0, y_0, z_0, \phi_0)$ 为式(5)的一个平衡点, 令方程组左边为0, 该平衡点可由式(6)求得:

$$\begin{cases} 0 = -x_0 + 2.6 \tanh(x_0) - 1.44 \tanh(y_0) \\ \quad + 0.6 \tanh(z_0) \\ 0 = -y_0 + 2.4 \tanh(x_0) + k(a + b\phi_0) \tanh(y_0) \\ \quad + 1.35 \tanh(z_0) \\ 0 = -z_0 - 6 \tanh(x_0) - 1.2 \tanh(z_0) \\ 0 = c \tanh(y_0) - dh(\phi_0) \end{cases} \quad (6)$$

其中, $g(i) = \text{sech}(i)^2$, ($i=x_0, y_0, z_0$)。分析结果表明, 平衡点 P 的位置及系统稳定性均由忆阻自连接突触的耦合强度和忆阻参数共同决定, 因此这两种参数对式(5)所描述四维忆阻HNN系统的动力学行为具有显著影响。采用图解法和数值法相结合的方式计算系统的平衡点, 考虑 $N=1$ 的情况, 并将参数设置为 $a=1, b=0.01, c=2.3, d=1.425, k=1.6$, 初始状态设为 $(0.1, 0, 0, 0)$ 。通过识别绿色曲线 $H_1(\phi, z)$ 和红色曲线 $H_2(\phi, z)$ 的交点确定 ϕ 和 z 的值, 详见图2(a), 再通过 ϕ 和 z 的值计算得到 x 和 y 的

由式(6)的后两式化简可得如下方程组:

$$\begin{cases} x_0 = a \tanh(-z_0/6 - 1.2 \tanh(z_0)/6) \\ y_0 = a \tanh(d \times h(\phi_0)/c) \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)的前两式, 可以得到函数 $H_1(\phi, z)$ 和 $H_2(\phi, z)$ 为:

$$\begin{cases} H_1(\phi, z) = -y + 2.4 \tanh(x) + k(a + b\phi) \tanh(y) \\ \quad + 1.35 \tanh(z) \\ H_2(\phi, z) = -x + 2.6 \tanh(x) - 1.44 \tanh(y) \\ \quad + 0.6 \tanh(z) \end{cases} \quad (8)$$

则式(6)的平衡点 P 即为函数 $H_1(\phi, z)=0$ 和 $H_2(\phi, z)=0$ 的交点。在平衡点 P 邻近区域, 式(6)对应的雅可比矩阵 J 可表示为:

$$J = \begin{bmatrix} -1 + 2.6g(x_0) & -1.44g(y_0) & 0.6g(z_0) & 0 \\ 2.4g(x_0) & -1 + k(a + b\phi_0)g(y_0) & 1.35g(z_0) & kb \tanh(y_0) \\ -6g(x_0) & 0 & -1 - 1.2g(z_0) & 0 \\ 0 & cg(y_0) & 0 & -d \end{bmatrix} \quad (9)$$

值。值得注意的是, 引入多分段非线性磁控忆阻器会使多涡卷吸引子沿 ϕ 方向扩展, 从而增加平衡点的数量。为便于理解, 图2(b)展示了平衡点与多涡卷吸引子相图之间的关系, 这两条曲线共有9个交点, 即存在9个平衡点。不难发现这9个平衡点以中间的3个平衡点为基准向两侧扩展, 使用“o”标记不稳定指标1鞍焦点, “*”标记不稳定指标2鞍焦点。以原点附近的三个平衡点 $(0, 0, 0, 0)$, $(-0.553, -0.1196, 1.872, -0.192)$ 和 $(0.553, 0.1196, -1.872, 0.192)$ 为例, 表1分别列出了其特征值及稳定性分

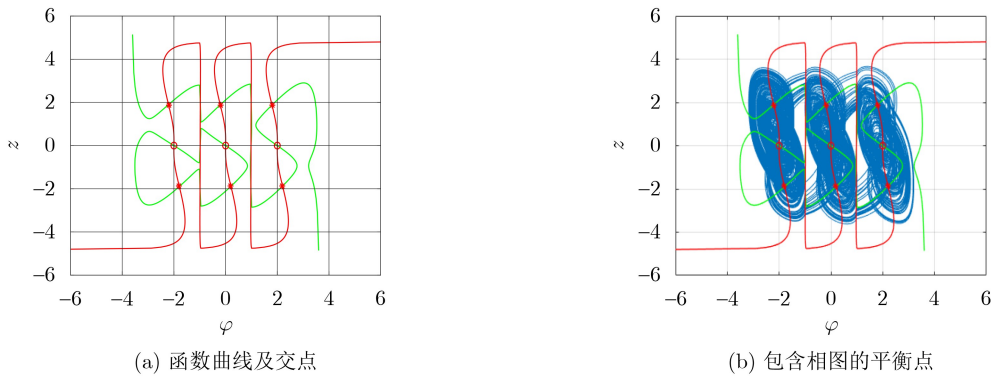


图 2 平衡点与稳定性分析

表 1 $k=1.6$ 时的平衡点、特征值和稳定性

平衡点坐标	特征值	稳定性
$P_0: (0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1=0.9891, \lambda_2=-1.32,$ $\lambda_{3,4}=-0.4945 \pm 1.9773i$	不稳定指标1鞍焦点
$P_1: (-0.553, -0.1196, 1.872, -0.192)$	$\lambda_1=-0.8929, \lambda_2=-1.3189,$ $\lambda_{3,4}=0.6665 \pm 1.5464i$	不稳定指标2鞍焦点
$P_2: (0.553, 0.1196, -1.872, 0.192)$	$\lambda_1=-0.8916, \lambda_2=-1.3211,$ $\lambda_{3,4}=0.6374 \pm 1.5431i$	不稳定指标2鞍焦点

析结果。根据Shil'nikov定理, 本文所提出的四维忆阻HNN系统可产生自激混沌吸引子, 并且在 $N=1$ 的情况下生成3个双涡卷吸引子。

3 动力学行为分析

3.1 随忆阻耦合强度 k 变化的动力学

设置参数 $N=0$, $a=1$, $b=0.01$, $c=1.83$, $d=1.425$, 选取初始条件为 $(-0.1, -0.1, -0.1, -0.1)$ 和 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$, 忆阻耦合强度 k 在 $[0.4, 2]$ 区间变化。采用四阶龙格-库塔(Runge-Kutta)算法和最大值法计算状态变量 ϕ 的分岔图和对应的李雅普诺夫指数谱(Lyapunov exponents, LE), 分别如图3(a)和图3(b)所示。图3(a)中红色图线对应初始条件 $(-0.1, -0.1, -0.1, -0.1)$, 蓝色图线对应初始条件 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。以图3(a)红色图线分岔图为例, 随着耦合强度 k 增大, 系统经历典型的倍周期分岔路径进入混沌; 在 $k=0.88$ 时由周期1分岔为周期2, 在 $k=0.97$ 时进一步分岔为周期4, 并于 $k=0.99$ 进入混沌状态; 此后系统在混沌与拟周期状态间交替, 在区间 $[0.99, 1.35]$ 和 $[1.49, 1.524]$ 内呈现单涡卷混沌吸引子, 在区间 $(1.35, 1.49)$ 内表现拟周期状态, 在 $[1.524, 1.76]$ 内则为双涡卷混沌吸引子; 最终, 系统在 $k=1.77$ 处经切分岔回归周期1状态。通过观察发现, 当忆阻耦合强度 k 落在不连续区间 $[0.99, 1.35]$ 和 $[1.49, 1.76]$ 内时, 系统的最大李雅普诺夫指数变为正数, 而在其他区间, 系统的最大李雅普诺夫指数保持在0或0以下。这意味着当 k 在这两个区间取值时产生混沌吸引子, 而在其他区间内则产生周期或准周期吸引子。同时, 相应的李雅普诺夫指数谱如图3(b)所示, 由于LE4维持在 -1.5 附近, 故图3(b)中予以省略。图3(b)上半图的初始状态为 $(-0.1, -0.1, -0.1, -0.1)$, 图3(b)下半图的初始状态为 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。

图4中显示了当忆阻耦合强度 k 取不同值时, 系统在 ϕ - x 平面上的相图, 红色图线和蓝色图线描述

的初始条件分别为 $(-0.1, -0.1, -0.1, -0.1)$ 和 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。图4(a)为 $k=0.7$ 时的共存周期1吸引子, 图4(b)为 $k=0.9$ 时的共存周期2吸引子, 图4(c)为 $k=0.97$ 时的共存周期4吸引子和周期2吸引子, 图4(d)为 $k=1.44$ 时的共存拟周期吸引子, 图4(e)为 $k=1.5$ 时的共存单涡卷混沌吸引子, 图4(f)为 $k=1.6$ 时的共存双涡卷混沌吸引子。结果表明, 忆阻耦合强度 k 取不同值时, 四维忆阻HNN系统会产生各种不同类型的共存吸引子。

3.2 多涡卷吸引子的单向拓展

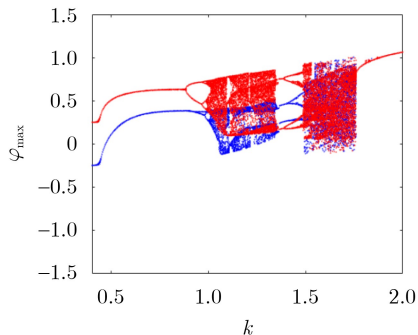
在3.1节的基础上, 选取参数 $a=1$, $b=0.01$, $c=2.3$, $d=1.425$, $k=1.61$, 设置初始条件为 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。四维忆阻HNN系统可沿 ϕ 方向产生任意数量的双涡卷吸引子, 且吸引子的数目由参数 N 或 M 的取值控制。如图5(a)和图5(c)所示, 内部状态变量函数 $h(\varphi)$ 取 $h_1(\varphi)$ 时, 吸引子产生奇数个单方向拓展; 如图5(b)和图5(d)所示, 内部状态变量函数 $h(\varphi)$ 取 $h_2(\varphi)$ 时, 吸引子产生偶数个单方向拓展; 吸引子的数目 N_s 可总结为:

$$N_s = \begin{cases} 2N + 1 & h(\varphi) = h_1(\varphi) \\ 2M + 2 & h(\varphi) = h_2(\varphi) \end{cases} \quad (10)$$

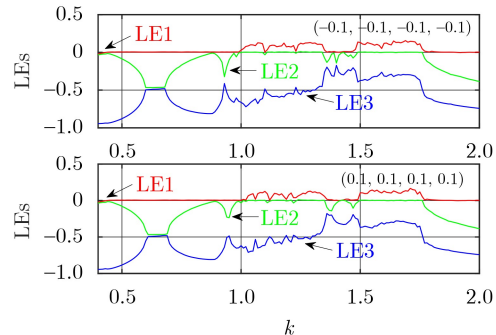
为了进一步揭示该四维忆阻HNN系统的复杂动力学现象, 本节以 k - $\phi_{\max}$ 平面的分岔图来描述多涡卷吸引子的存在特性, k 的取值范围与3.1节一致, 限定在 $[0.4, 2]$, 分岔图中混沌图像表现为以密集点块为特征的条形区域。如图6所示, 在区间 $[1.58, 1.742]$ 上, 条形区域随着 N 或 M 取值的变化不断有序地增加, 这进一步证明了该四维忆阻HNN系统具有产生多个双涡卷吸引子的能力, 且其数量稳定可控。

3.3 具有嵌套结构的多涡卷吸引子

在四维忆阻HNN系统基础上, 给神经元1加入由多级逻辑脉冲函数描述的脉冲电流(Multi-level-logic Pulse Current, I_{MLP})激励:

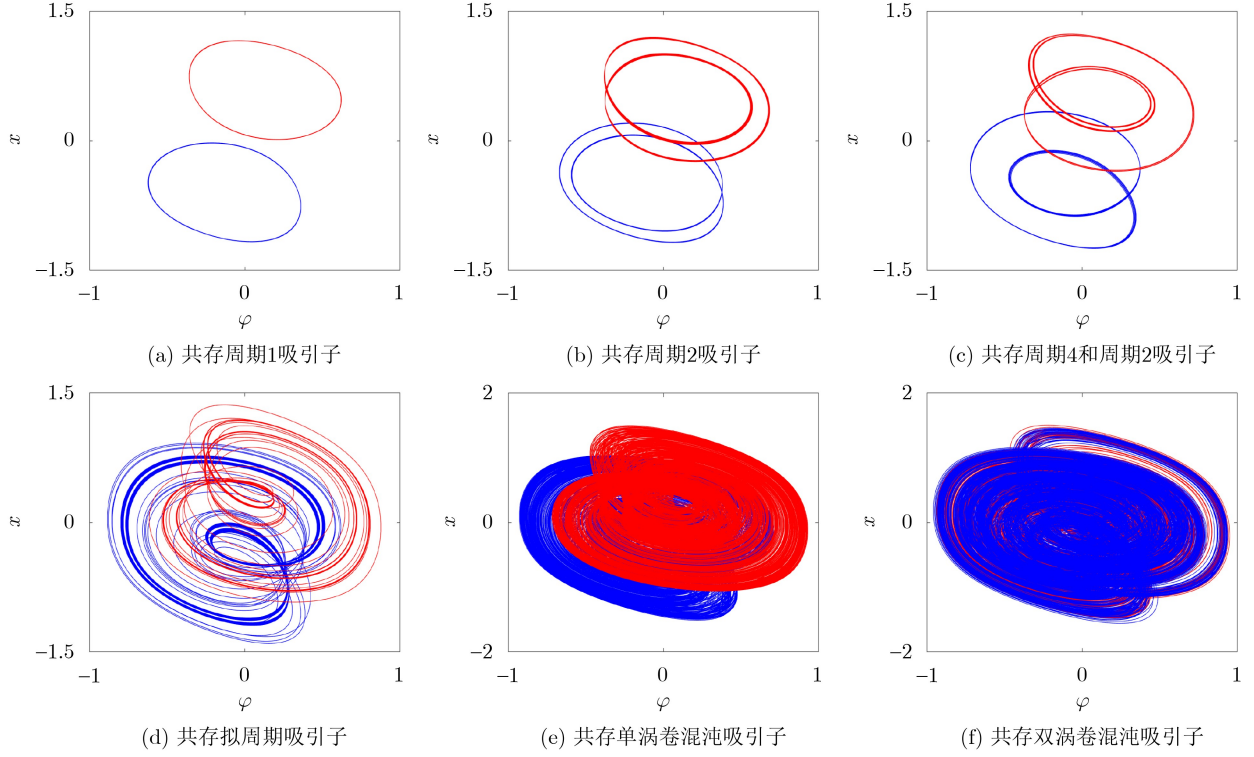
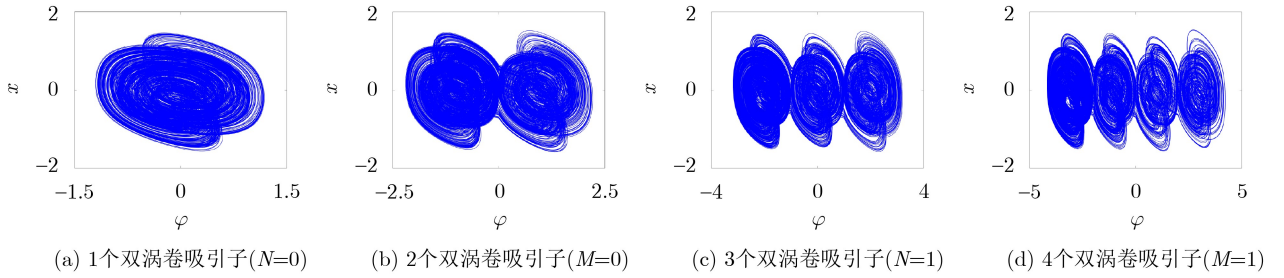


(a) 分岔图



(b) 李雅普诺夫指数谱

图3 随忆阻耦合强度 k 变化的动力学行为

图4 不同忆阻耦合强度 k 的共存吸引子相图图5 控制参数取 N 或 M 时的相图

$$I_{MLP} = s \sum_{n=1}^n a_n \operatorname{sgn}(\sin(\omega_n t)) \quad (11)$$

此时，加入多级逻辑脉冲电流的忆阻HNN系统拓扑图如图7所示，将该系统新命名为嵌套多涡卷忆阻HNN系统。

式(11)中， s 作为脉冲电流输出幅值的缩放系数，此处取值0.5， a_n 表示第 n 个频率分量的幅值系数， ω_n 表示第 n 个频率分量的角频率，此时式(5)可重新表示为：

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2.6 \tanh(x) - 1.44 \tanh(y) + 0.6 \tanh(z) \\ \quad + I_{MLP} \\ \dot{y} = -y + 2.4 \tanh(x) + kW(\varphi) \tanh(y) \\ \quad + 1.35 \tanh(z) \\ \dot{z} = -z - 6 \tanh(x) - 1.2 \tanh(z) \\ \dot{\varphi} = c \tanh(y) - dh(\varphi) \end{cases} \quad (12)$$

值得注意的是，多级逻辑脉冲电流的加入不会

改变式(5)的非线性特征。参数取值为 $a=1$, $b=0.01$, $c=1.83$, $d=1.425$, $k=1.08$ ，初始条件为 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ ，脉冲电流激励 n 取1，当参数 $a_1=0.654$, $\omega_1=0.342$ 时，仿真结果表明，在忆阻自连接突触和外加多级逻辑脉冲电流的共同激励下，式(12)在3.2节多双涡卷吸引子的基础上产生了具有特殊结构的多双涡卷吸引子，这里命名为嵌套多涡卷吸引子，如图8所示，它可实现与3.2节一致的吸引子数目拓展。

为了进一步研究四维忆阻HNN系统和嵌套多涡卷忆阻HNN系统，本节选用动态映射法与双参数复杂度分布法分析。它们均为研究非线性系统随参数动态演化的数值分析方法。动态图基于最大李雅普诺夫指数(LE1)绘制，其中LE1用于表征系统的动力学特性；LE1为负值时对应系统稳定点，为零值时对应周期或拟周期状态，为正值时则对应混沌状态。二维动态图将LE1与系统多个参数相关

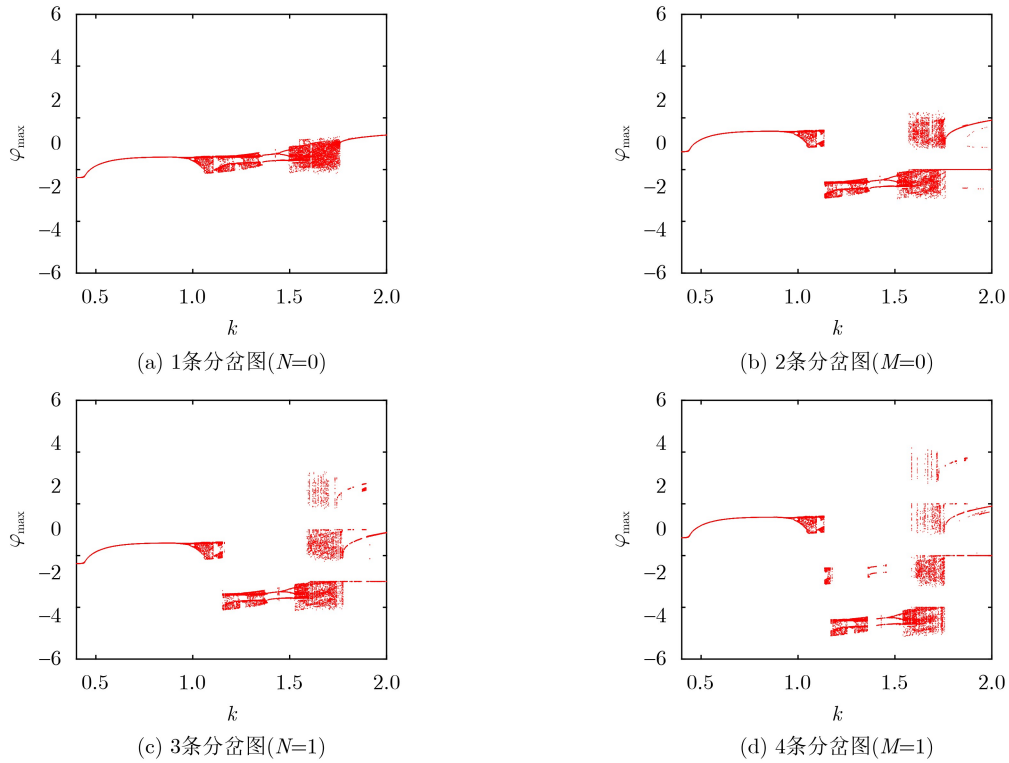
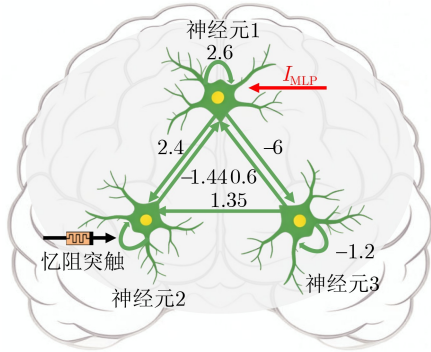
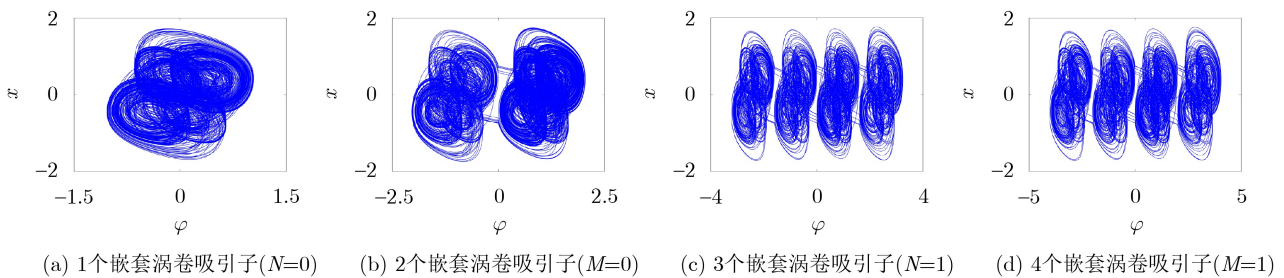
图6 k - $\phi_{\max}$ 平面的分岔图

图7 嵌套多涡卷忆阻HNN系统的拓扑图

联,可直观呈现多参数协同作用下系统不同动力学状态的分布规律。谱熵(Spectral Entropy, SE)算法是量化非线性动力系统复杂性的工具之一,其熵值大小与混沌序列的伪随机性正相关,即熵值越高,混沌序列的伪随机性越好。

选取忆阻耦合强度 k 和忆阻参数 c 作为变量参数, k 取值范围为 $[0, 3]$, c 的取值范围为 $[-11.5, 11.5]$,取控制参数 N 为0,其余系统参数及初始条件均与3.2节保持一致,以确保实验的连贯性与可比性。图9为施加多级逻辑脉冲电流前,即四维忆阻HNN系统的动态映射和复杂度分布图,通过观察这组图可知,在给定的参数范围内,四维忆阻HNN系统的动力学行为受参数 k 和 c 的影响显著。图10为施加多级逻辑脉冲电流后,即嵌套多涡卷忆阻HNN系统的动态映射和复杂度分布图。对比多级逻辑脉冲电流施加前后的动态图及复杂度分布图可发现,无外加多级逻辑脉冲电流时,二维动态图的颜色过渡平缓,无明显的状态突变区域,对应的三维动态图曲面波动幅度较小,表明此时的动态行为相对平稳。施加多级逻辑脉冲电流后,二维动态图中出现显著的混沌状态聚集区域;对应的三维动

图8 控制参数取 N 或 M 时的相图

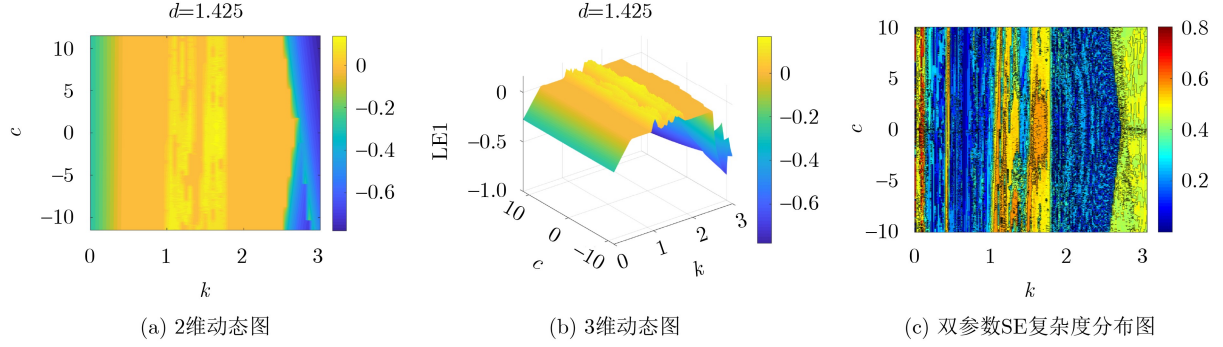


图 9 四维忆阻HNN系统的动态映射与复杂度分布

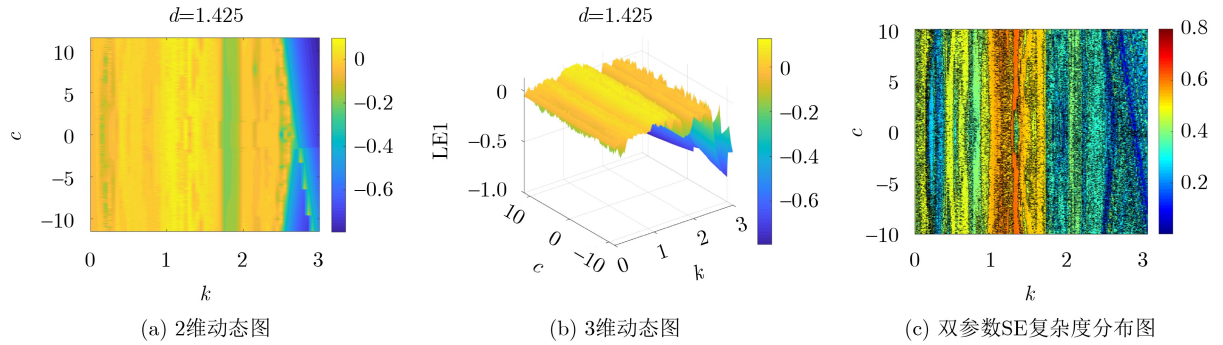


图 10 嵌套多涡卷忆阻HNN系统的动态映射与复杂度分布

态图曲面呈现出明显的尖峰与凹陷结构，表明LE1值随参数变化的波动幅度增大。同时，双参数SE复杂度分布的数值更为集中，整体复杂度上升。上述结果表明，多级逻辑脉冲电流激励可通过引入外部扰动，提升忆阻HNN系统的复杂度。

4 基于Multisim与FPGA的硬件电路实现

4.1 基于Multisim软件的模拟电路验证

对嵌套多涡卷忆阻HNN系统中涉及的函数子模块进行模拟电路的等效实现，包括多分段函数电路模块 $h(\varphi)$ 、双曲正切函数电路模块 $\tanh(i)$ ($i=x, y, z$)和多级逻辑脉冲函数电路模块 I_{MLP} ，再基于以上子模块，对嵌套多涡卷忆阻HNN系统进行主电路模块的等效实现，如图11所示。

在多级逻辑脉冲电流激励中，当输入电压为 $V_{an}=\sin(2\pi F_{an}t)$ 时，其输出电流 I_{MLP} 的数学表达式为：

$$I_{MLP} = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(\sin(2\pi F_{an}t)) / R_{an} \quad (13)$$

多分段函数电路模块 $h(\varphi)$ 的开关 K_0 、 K_1 、 K_2 至 K_n 用于控制多分段非线性磁控忆阻器的取值，而 E_0 、 E_1 、 E_2 至 E_n 代表控制电压，通过合理配置开关和控制电压，该电路可产生不同数量的嵌套多涡卷吸引子。本节以 $n=2$ 为例，On表示开关打开，Off表示开关关闭，具体数量和对应关系见表2。

在本电路实验中，选用TL082CP运算放大器、AD633乘法器和MPS2222晶体管，均连接到 ± 15 V电源。双曲正切函数电路模块 $\tanh(i)$ 由11个电阻器、4个NPN晶体管、2个运算放大器和2个电源电压 $V_{CC}=+15$ V和 $V_{EE}=-15$ V组成，红色框中的电路等效于1.1 mA的恒流源。多级逻辑脉冲函数电路模块 I_{MLP} 中的开关用于控制脉冲电流激励中 n 的值，一个开关对应一个脉冲电流激励项。由于AD633乘法器的比例因子固定为 $1/10$ V $^{-1}$ ，因此需为每个非线性项添加 0.1 V $^{-1}$ 的比例因子。主电路模块中的开关K用于控制脉冲电流刺激，当开关打开时为四维忆阻HNN系统，当开关关闭时为嵌套多涡卷忆阻HNN系统。

依据基尔霍夫定律，可推导出电路状态方程组如下：

$$\begin{cases} RC \frac{dv_1}{dt} = -v_1 + \frac{R}{R_1} \tanh(v_1) - \frac{R}{R_2} \tanh(v_2) \\ \quad + \frac{R}{R_3} \tanh(v_3) + s \sum \frac{R}{R_{an}} \text{sgn}(\sin(2\pi F_{an}t)) \\ RC \frac{dv_2}{dt} = -v_2 + \frac{R}{R_4} \tanh(v_1) + \left(\frac{R}{R_5} + \frac{gR}{R_6} v_4 \right) \\ \quad \cdot \tanh(v_2) + \frac{R}{R_7} \tanh(v_3) \\ RC \frac{dv_3}{dt} = -v_3 - \frac{R}{R_8} \tanh(v_1) - \frac{R}{R_9} \tanh(v_3) \\ RC \frac{dv_4}{dt} = \frac{R}{R_{10}} \tanh(v_2) - \frac{R}{R_{11}} h(v_4) \end{cases} \quad (14)$$

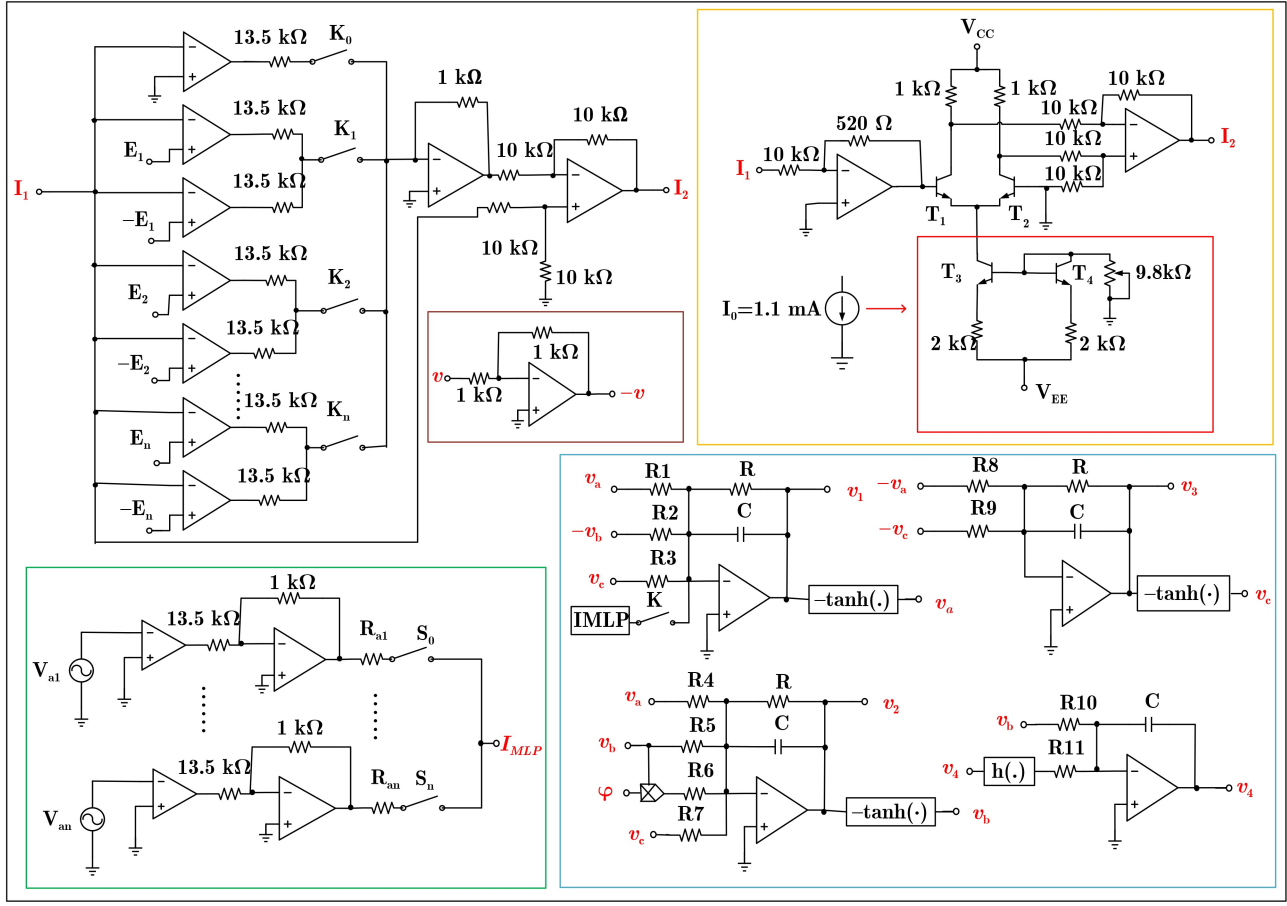


图 11 嵌套多涡卷忆阻HNN系统的Multisim等效电路

表 2 不同开关与控制电压组合下对应的控制参数与吸引子数量

K_0	K_1	K_2	对应的控制参数	吸引子数量
$E_1=1V$	$E_2=3V$	$E_3=5V$		
On	On	On	$h_1(\varphi) N=0$	1
On	Off	On	$h_1(\varphi) N=1$	3
On	Off	Off	$h_1(\varphi) N=2$	5
$E_1=2V$	$E_2=4V$	$E_3=6V$		
Off	On	On	$h_2(\varphi) M=0$	2
Off	Off	On	$h_2(\varphi) M=1$	4
Off	Off	Off	$h_2(\varphi) M=2$	6

这里的 RC 表示积分时间常数, 假设 $RC=100 \mu s$, 取电阻 $R=10 k\Omega$, 计算得到电容 $C=10 nF$ 。同时, v_1 、 v_2 和 v_3 分别表示3个神经元上的膜电位, v_4 表示通过神经元2的磁通量, 可通过反相电路获得 $-v_1$ 、 $-v_2$ 和 $-v_3$ 。其中 g 表示AD633乘法器的控制增益, 取0.1, 根据3.3节相关参数取值为 $a=1$, $b=0.01$, $c=1.83$, $d=1.425$, $k=1.08$ 。将式(14)与式(12)进行比较, 对应的系数应保持一致, 可计算得出在图11中所有电阻的电阻值如下所示: $R_1=3.8462 k\Omega$, $R_2=6.9444 k\Omega$, $R_3=16.6667 k\Omega$, $R_4=4.1667 k\Omega$, $R_5=9.2593 k\Omega$, $R_6=92.5926 k\Omega$, $R_7=7.4074 k\Omega$,

$R_8=1.6667 k\Omega$, $R_9=8.3333 k\Omega$, $R_{10}=5.4645 k\Omega$, $R_{11}=7.0175 k\Omega$ 。在多级逻辑脉冲函数表示的脉冲电流中 n 取1, 根据3.3节, 参数取值为 $a_1=0.654$ 和 $\omega_1=0.342$, π 取近似值3.141 592, 可得 $R_{a1}=R/(0.5a_1)=30.5806 k\Omega$ 和 $F_{a1}=\omega_1/(2\pi RC)=0.54431 kHz$, 设置相应的数值后, 在Multisim上进行模拟电路仿真的结果如图12所示。

4.2 基于FPGA的数字硬件实验验证

FPGA平台中各项功能的实现主要依托编程语言, 这一特性使得系统参数的调整与初始值的配置更加便捷且精准, 适用于对系统参数及初始值具有高度敏感性的非线性系统的实现。实验经过综合考虑, 选择在Vivado 2020.2平台上进行, 通过Verilog硬件描述语言(VHDL)编程, 在Xilinx ZYNQ-XC7Z100FFG开发板上实现。首先采用高阶龙格-库塔算法对连续时间模型进行离散化处理, 离散时间步长设置为0.01, 本研究选用浮点运算, 以得到与仿真结果一致的实验结果。FPGA项目的整体程序设计以module_RK4模块作为顶层模块, 统筹控制各底层功能模块的协同工作。系统子模块module_dx1、module_dx2、module_dx3和module_dx4共同完成式(12)的实现, 系统函数模

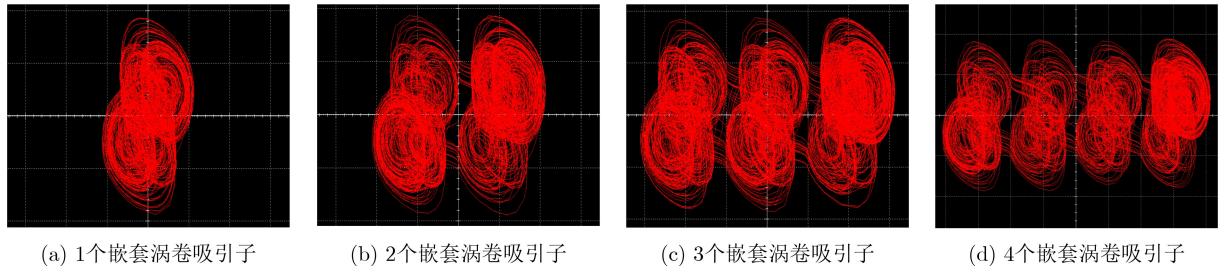


图 12 Multisim电路仿真结果图

块包括module_fcoss、module_fsin和module_sign，多级逻辑脉冲函数描述的脉冲电流激励通过方波模块module_wave实现，子模块依次调度乘法、加法器件执行核心运算逻辑，最后通过module_float2fix模块将浮点数转换为定点数，输出可用于示波器显示的波形。

图13为FPGA硬件平台连接数字示波器的实验搭建，主要包括FPGA开发板、双通道DAC转换器和数字示波器。若要在示波器中成功观察到吸引子，则需将生成的比特流文件烧录到FPGA开发板中。通过在模块module_dx4中编写不同的 M 或 N 数值下的函数表达式，在顶层模块module_RK4中选择 x_4 和 x_1 信号，在数字示波器上就可以观察到沿 φ 方向扩展的不同数量的嵌套多涡卷吸引子相图，如图14所示。图14中的吸引子相图与图8和图12中



图 13 FPGA连接实物图

的吸引子相图相对应。MATLAB数值仿真结果、Multisim模拟电路仿真结果和FPGA数字硬件电路实验结果的一致性，证明了该嵌套多涡卷忆阻HNN系统的物理可实现性。

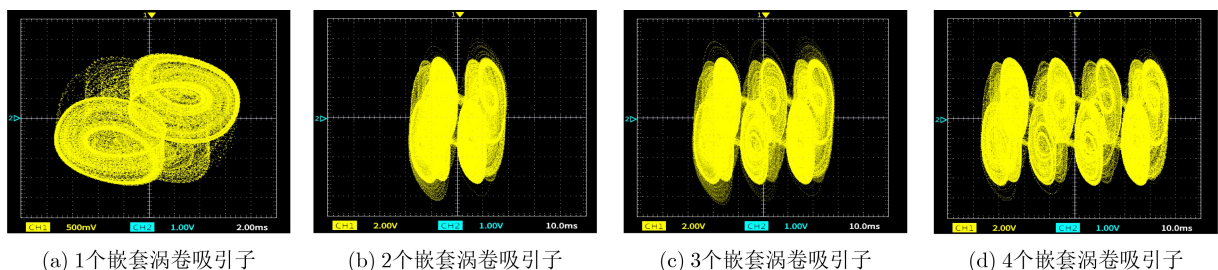


图 14 FPGA硬件实验结果图

5 结论

本文以三神经元HNN为基础，将多分段非线性磁控忆阻器引入神经元自连接突触，构建了四维忆阻HNN系统。在完成平衡点及稳定性分析后，通过数值仿真揭示了忆阻耦合强度对系统动力学的调控作用，以及与系统初值相关的共存吸引子及其演化规律。结果显示，该系统可经倍周期分岔进入混沌状态，产生单、双涡卷混沌吸引子；通过调控忆阻器参数，还能拓展多涡卷吸引子的数目。在此基础上，本文外加多级逻辑脉冲电流对系统进行调控，构建了一种新型嵌套多涡卷忆阻HNN系统，此系统可生成具有嵌套结构的多涡卷吸引子。频谱熵分析表明，外加多级逻辑脉冲电流后，系统的复

杂度得到了提升。Multisim模拟电路仿真、FPGA数字电路硬件实现与MATLAB数值仿真结果一致，验证了所提嵌套多涡卷忆阻HNN系统的物理可实现性。本文发现的具有嵌套结构的多涡卷吸引子，突破了现有多涡卷吸引子单一结构的局限，为忆阻神经网络动力学调控、混沌保密通信等工程应用提供了新的理论支撑。

参考文献

- [1] MIN Fuhong, JI Junhong, CAO Yi, *et al.* Bifurcation dynamics, amplitude-frequency characteristics of Hopfield neural network and its application[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2025, 12(14): 27033–27043. doi: [10.1109/JIOT.2025.3561933](https://doi.org/10.1109/JIOT.2025.3561933).

- [2] MA Jun. Biological neurons to neural circuit, review from physical perspective[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113(19): 25365–25387. doi: [10.1007/s11071-025-11487-4](https://doi.org/10.1007/s11071-025-11487-4).
- [3] 武花干, 边逸轩, 陈墨, 等. 忆阻耦合异构忆阻细胞神经网络的多稳态与相位同步研究[J]. 电子与信息学报, 2024, 46(9): 3818–3826. doi: [10.11999/JEIT240010](https://doi.org/10.11999/JEIT240010).
WU Huagan, BIAN Yixuan, CHEN Mo, *et al.* Multistable state and phase synchronization of memristor-coupled heterogeneous memristive cellular neural network[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2024, 46(9): 3818–3826. doi: [10.11999/JEIT240010](https://doi.org/10.11999/JEIT240010).
- [4] LIANG Yan, GENG Qingdian, CAI Qidan, *et al.* Dynamics of double locally active memristors-based neuron and its circuit implementation[J]. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2026, 45(2): 770–783. doi: [10.1109/TCAD.2025.3591412](https://doi.org/10.1109/TCAD.2025.3591412).
- [5] BAO Han, CHEN Zhuguan, MA Jun, *et al.* Planar homogeneous coexisting hyperchaos in bi-memristor cyclic hopfield neural network[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(12): 16398–16408. doi: [10.1109/TIE.2024.3387058](https://doi.org/10.1109/TIE.2024.3387058).
LAI Qiang and QIN Minghong. Dynamic analysis and synchronization control of extremely simple cyclic memristive chaotic neural network[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2025, 47(9): 3262–3273. doi: [10.11999/JEIT250212](https://doi.org/10.11999/JEIT250212).
- [6] 赖强, 秦铭宏. 极简环形忆阻混沌神经网络的动力学分析与同步控制[J]. 电子与信息学报, 2025, 47(9): 3262–3273. doi: [10.11999/JEIT250212](https://doi.org/10.11999/JEIT250212).
LAI Qiang and QIN Minghong. Dynamic analysis and synchronization control of extremely simple cyclic memristive chaotic neural network[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2025, 47(9): 3262–3273. doi: [10.11999/JEIT250212](https://doi.org/10.11999/JEIT250212).
- [7] WAN Qiuzhen, YAN Zidie, LI Fei, *et al.* Multistable dynamics in a Hopfield neural network under electromagnetic radiation and dual bias currents[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 109(3): 2085–2101. doi: [10.1007/s11071-022-07544-x](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07544-x).
- [8] PENG Cheng, LI Zhijun, WANG Mengjiao, *et al.* Dynamics in a memristor-coupled heterogeneous neuron network under electromagnetic radiation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(17): 16527–16543. doi: [10.1007/s11071-023-08671-9](https://doi.org/10.1007/s11071-023-08671-9).
- [9] WANG Yanfeng, SU Pengke, WANG Zicheng, *et al.* FN-HNN coupled with tunable multistable memristors and encryption by Arnold mapping and diagonal diffusion algorithm[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2025, 72(9): 4830–4842. doi: [10.1109/TCSI.2024.3516722](https://doi.org/10.1109/TCSI.2024.3516722).
- [10] XU Quan, WANG Yiteng, WU Huagan, *et al.* Periodic and chaotic spiking behaviors in a simplified memristive Hodgkin-Huxley circuit[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, 179: 114458. doi: [10.1016/j.chaos.2024.114458](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114458).
- [11] MOU Jun, CAO Hongli, ZHOU Nanrun, *et al.* An FHN-HR neuron network coupled with a novel locally active memristor and its DSP implementation[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, 54(12): 7333–7342. doi: [10.1109/TCYB.2024.3471644](https://doi.org/10.1109/TCYB.2024.3471644).
- [12] ZHANG Xin, LI Chunbiao, LEI Tengfei, *et al.* Coexisting hyperchaos in a memristive neuromorphic oscillator[J]. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2025, 44(8): 3179–3188. doi: [10.1109/TCAD.2025.3538692](https://doi.org/10.1109/TCAD.2025.3538692).
- [13] WAN Qiuzhen, YANG Qiao, LIU Tieqiao, *et al.* Single direction, grid and spatial multi-scroll attractors in Hopfield neural network with the variable number memristive self-connected synapses[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, 189: 115584. doi: [10.1016/j.chaos.2024.115584](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115584).
- [14] LI Fangyuan, BAI Lianfa, CHEN Zhuguan, *et al.* Scroll-growth and scroll-control attractors in memristive bi-neuron Hopfield neural network[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2024, 71(4): 2354–2358. doi: [10.1109/TCSII.2023.3331058](https://doi.org/10.1109/TCSII.2023.3331058).
- [15] 刘嵩, 李子涵, 邱达, 等. 可控多双涡卷忆阻Hopfield神经网络建模及其动力学分析[J]. 电子与信息学报, 2026, 48(1): 417–428. doi: [10.11999/JEIT250972](https://doi.org/10.11999/JEIT250972).
LIU Song, LI Zihan, QIU Da, *et al.* Modeling and dynamic analysis of controllable multi-double scroll memristor hopfield neural network[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2026, 48(1): 417–428. doi: [10.11999/JEIT250972](https://doi.org/10.11999/JEIT250972).
- [16] ZHANG Sen, PENG Xuenan, WANG Xiaoping, *et al.* A novel memristive multiscroll multistable neural network with application to secure medical image communication[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2025, 35(2): 1774–1786. doi: [10.1109/TCSVT.2024.3483569](https://doi.org/10.1109/TCSVT.2024.3483569).
- 王 哲: 女, 硕士生, 研究方向为非线性电路与系统、忆阻神经网络动力学。
万求真: 男, 教授, 研究方向为非线性电路与系统、忆阻神经网络类脑电路和CMOS集成电路芯片设计。
周 盼: 女, 本科生, 研究方向为非线性电路与系统。
饶湖辉: 女, 硕士生, 研究方向为非线性电路与系统、忆阻神经网络动力学。

责任编辑: 余 蓉

A Nested Multi-scroll Memristive Hopfield Neural Network and Its Hardware Implementation

WANG Zhe WAN Qiuzhen ZHOU Pan RAO Huhui

(College of Information Science and Engineering, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract:

Objective In recent years, researchers have employed memristors to simulate neuronal synapses for dynamically adjusting synaptic weights, thereby constructing memristive neural networks. The memristive Hopfield neural network (HNN) can more precisely reflect the nonlinear dynamic behavior of biological neural systems. Notably, multi-scroll attractors have garnered significant attention in the field of secure communication owing to their complex topological structures and high state-space ergodicity. However, most existing studies have focused primarily on single-structure multi-scroll attractors, whereas multi-scroll attractors with special structures remain in need of further exploration. Consequently, this paper proposes an HNN system capable of generating special nested multi-scroll attractors, thereby overcoming the limitations of traditional single-structure multi-scroll attractors.

Methods A four-dimensional (4D) memristive HNN system is constructed based on a three-neuron HNN. In this system, a multi-segment nonlinear magnetically controlled memristor is integrated into the self-connected synapse of neuron 2. By analyzing the equilibrium points and system stability, this study investigates the effects of memristor coupling strength and system initial conditions. The number of multi-scroll attractors can be increased by adjusting the parameters of the memristor. Building upon this, a novel nested multi-scroll memristive HNN system is established by introducing multi-level logic pulse current. The proposed system can generate unique nested multi-scroll attractors, and its complexity can be further enhanced. Finally, the accuracy of the MATLAB numerical results is verified through Multisim circuit simulation and FPGA-based hardware experiments.

Results and Discussions The experimental results indicate that by regulating the coupling strength of the memristor self-connected synapses, the proposed 4D memristive HNN system can yield bifurcation diagrams and Lyapunov exponent spectra (Fig. 3), as well as diverse coexisting attractors (Fig. 4). Meanwhile, multi-scroll attractors with varying scroll numbers are obtained (Fig. 5–7). By regulating multi-level logic pulse currents, a novel nested multi-scroll memristive HNN system is constructed. This system can generate nested multi-scroll attractors (Fig. 9–10). Spectral entropy analysis demonstrates that, compared with the original 4D memristive HNN system, the proposed system has its complexity effectively enhanced (Fig. 11–12). Both Multisim simulation (Fig. 14) and FPGA-based experiments (Fig. 15–16) verify the feasibility of the proposed memristive HNN system.

Conclusions Based on a three-neuron HNN, a 4D memristive HNN system is constructed by embedding a multi-segment nonlinear magnetically controlled memristor. Through equilibrium point and stability analysis, this paper reveals the regulatory effect of the memristor coupling strength, as well as the evolution law of coexisting attractors dependent on initial conditions. The results show that the system can enter a chaotic state via a period-doubling bifurcation route and produce single-scroll and double-scroll chaotic attractors. The number of multi-scroll attractors can be increased by optimizing memristor parameters. Furthermore, by regulating multi-level logic pulse currents, a novel nested multi-scroll memristive HNN system is developed to generate nested multi-scroll attractors. Spectral entropy analysis proves that the application of multi-level logic pulse currents enhances the system complexity. The numerical simulation results from MATLAB, Multisim simulations and FPGA-based experimental results are highly consistent, which validates the feasibility of the nested multi-scroll memristive HNN system.

Key words: Hopfield neural network; Memristive self-connecting synapses; Multi-level logic pulse current; Nested multi-scroll attractor; Hardware implementation.